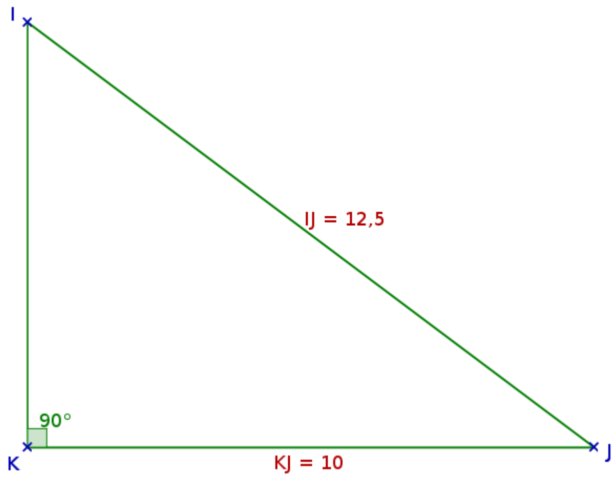
1 Rappels : Pythagore

1 Le théorème

Propriété

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Exemple : Calculer KI



• On sait que IJK est un triangle rectangle en K, l'**hypoténuse est** $IJ = 12,5$ et $KJ = 10$.

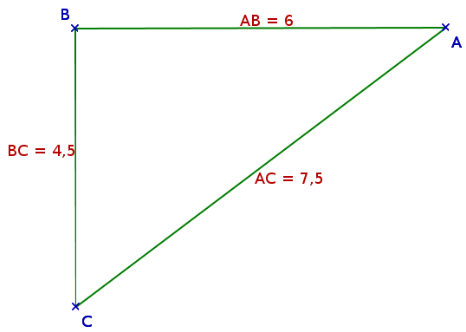
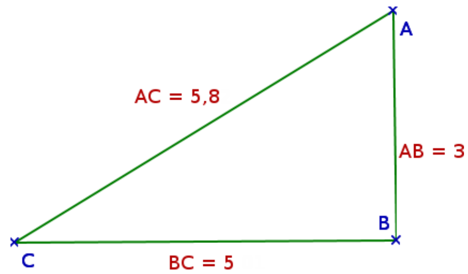
• Or, d'après le théorème de Pythagore, on a l'égalité :

• $IJ^2 = KJ^2 + KI^2$
$12,5^2 = 10^2 + KI^2$
$156,25 = 100 + KI^2$
$KI^2 = 156,25 - 100$
$KI^2 = 56,25$
Donc $KI = \sqrt{56,25} = 7,5$

1.2 Réciproque et contraposée

Quand on ne sait pas si le triangle est rectangle mais que l'on connait les longueurs de ses côtés, il y a deux cas possibles.

Exemples :

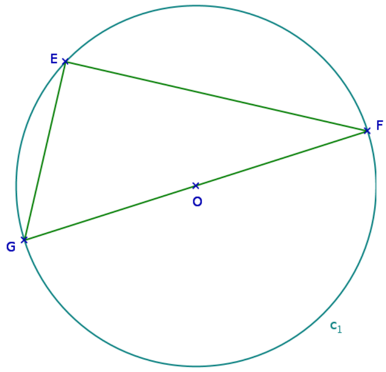
<table>
<tr><td>On veut montrer que le triangle est rectangle :
c'est la réciproque</td><td>On veut montrer que le triangle n'est pas rectangle :
c'est la contraposée</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">On commence de toute façon de la même manière, on calcule <u>séparément</u> le carré du plus grand côté et la somme des carrés des deux autres côtés.</td></tr>
<tr><td>$\begin{array}{l|l} AC^2 & BA^2+BC^2 \\ 7,5^2 & 6^2+4,5^2 \\ \boxed{56,25} & 36+20,25 \\ & \boxed{56,25} \end{array}$</td><td>$\begin{array}{l|l} AC^2 & BA^2+BC^2 \\ 5,8^2 & 3^2+5^2 \\ 33,64 & 9+25 \\ \boxed{33,64} & \boxed{34} \end{array}$</td></tr>
<tr><td>$AC^2 = BA^2 + BC^2$
Donc d'après la <u>réciproque</u> du théorème de Pythagore le triangle ABC est rectangle en B.</td><td>$AC^2 \neq BA^2 + BC^2$
Donc d'après la <u>contraposée</u> du théorème de Pythagore le triangle ABC n'est pas rectangle.</td></tr>
</table>

2 Rappels : cercles et triangles inscrits

Propriété

Si un triangle est inscrit dans un cercle ayant pour diamètre l'un de ses côtés alors ce triangle est rectangle et son hypoténuse est le diamètre du cercle.

Exemples :



- On sait que EFG est inscrit dans le cercle C et [GF] est un diamètre de ce cercle.
- Or, d'après la propriété précédente,
- Donc EFG est rectangle en E et son hypoténuse est [GF].

3 Trigonométrie

3.1 Rappels sur le cosinus d'un angle aigu

On rappelle la formule de $4^{\text{ème}}$ suivante, valable pour les angles aigus d'un triangle rectangle :

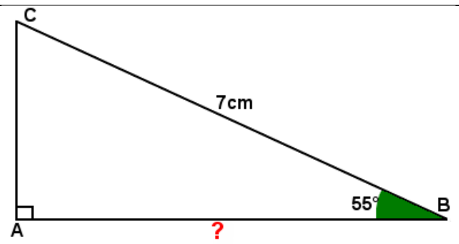
$$\boxed{\cos(\widehat{angle}) = \frac{adjacent}{hypoténuse}}$$

Exemples d'utilisations du cosinus :

1) On cherche la longueur du côté adjacent d'un angle.

ABC est un triangle rectangle en A.
$\widehat{CBA} = 55$ et l'hypoténuse [BC] mesure 7cm.

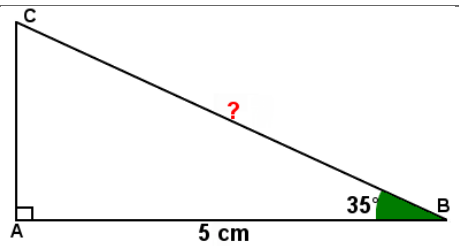
$$\cos(\widehat{CBA}) = \frac{BA}{BC}$$
$$\cos(55) = \frac{BA}{7}$$
$$BA = 7 \times \cos(55) \approx 4,02$$



2) On cherche la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle.

ABC est un triangle rectangle en A.
$\widehat{CBA} = 35$ et le côté adjacent à $\widehat{CBA}$: [BA] mesure 5cm.

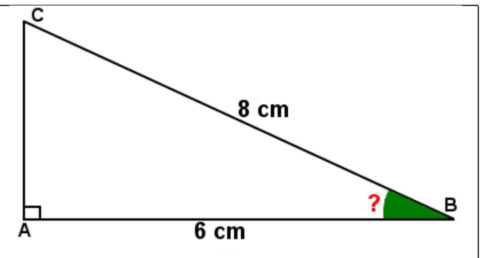
$$\cos(\widehat{CBA}) = \frac{BA}{BC}$$
$$\cos(35) = \frac{5}{BC}$$
$$BC = \frac{5}{\cos(35)} \approx 6,1$$



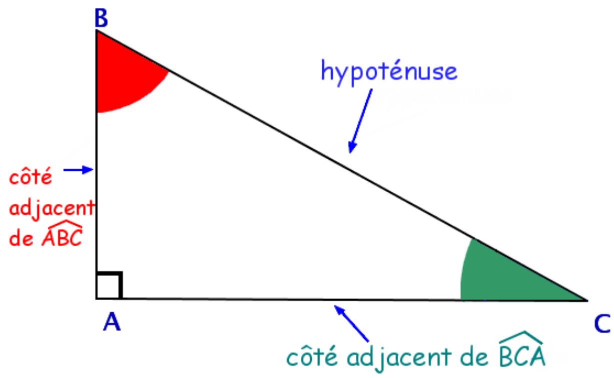
3) On cherche la mesure d'un angle aigu dans un triangle rectangle.

ABC est un triangle rectangle en A.
le côté adjacent à l'angle $\widehat{CBA}$ est $AB = 6cm$ et l'hypoténuse [BC] mesure 8cm.

$$\cos(\widehat{CBA}) = \frac{BA}{BC}$$
$$\cos(\widehat{CBA}) = \frac{6}{8}$$
$$\widehat{CBA} = \arccos\left(\frac{6}{8}\right) \approx 41,4$$



Remarque : Beaucoup trop d'élèves, même en troisième ne savent toujours pas ce qu'est le côté adjacent d'un angle et demande parfois en regardant un triangle rectangle : "c'est lequel le côté adjacent ?". Cette simple question montre que l'élève n'a pas compris, car on ne parle pas du côté adjacent d'un triangle mais du côté adjacent d'un angle, le côté adjacent est relatif à l'angle dont on parle.
Par exemple dans la figure ci-dessous le côté adjacent de l'angle $\widehat{ABC}$ en rouge est [BA] car l'angle $\widehat{ABC}$ a deux côtés : [BA] et [BC] mais [BC] a déjà un nom : c'est l'hypoténuse du triangle, l'autre côté de l'angle (celui qui n'est pas l'hypoténuse) est alors appelé côté adjacent de l'angle, c'est donc [BA]. Le troisième côté du triangle, [AC], est lui appelé le côté opposé de l'angle $\widehat{ABC}$.
Par contre, si l'on change d'angle et que l'on regarde cette fois-ci l'angle $\widehat{BCA}$ en vert, l'hypoténuse ne change pas : [CB], le côté adjacent de l'angle $\widehat{BCA}$ est alors [CA] et le côté opposé de l'angle $\widehat{BCA}$ est alors [BA].



3.2 Sinus et tangente d'un angle aigu

De même que pour le cosinus, on a par <u>définition</u> et pour des angles aigus dans un triangle rectangle les formules suivantes :

Définition

Dans un triangle rectangle, le **sinus** d'un angle aigu est égal au quotient de la longueur du côté opposé de l'angle par la longueur de l'hypoténuse.

$$\sin\left(\widehat{angle}\right) = \frac{\textit{opposé}}{\textit{hypoténuse}}$$

Définition

Dans un triangle rectangle, la **tangente** d'un angle aigu est égal au quotient de la longueur du côté opposé de l'angle par la longueur du côté adjacent de l'angle.

$$\tan\left(\widehat{angle}\right) = \frac{\textit{opposé}}{\textit{adjacent}}$$

<u>Remarque</u> : Deux remarques importantes s'imposent :

1. Malgré le fait qu'il y ait un lien important entre la tangente (droite vue en classe de quatrième) et la formule de la tangente écrite ci-dessus, il ne faut pas les confondre, ce sont <u>deux objets différents qui portent le même nom</u>.

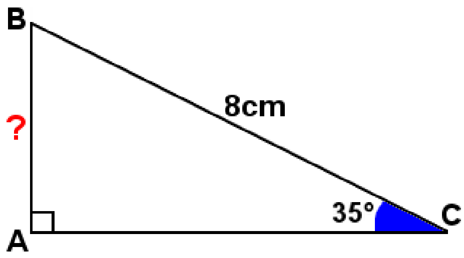
2. En classe de $3^{\text{ème}}$, ces formules servent à calculer des longueurs de côtés ou alors des mesures d'angles dans un triangle rectangle, mais c'était déjà le cas pour le cosinus, alors quel est l'intérêt de ces deux nouvelles formules ? Elles permettent d'aller plus vite dans certains cas, un exemple : si, dans un triangle rectangle, on connait le côté opposé et l'hypoténuse d'un angle que l'on cherche à calculer alors on va utiliser la formule du sinus car elle fait clairement apparaître : *opposé* et *hypoténuse*. On pourrait réussir avec le cosinus mais il faudrait appliquer la formule dans l'autre angle aigu puis utiliser la propriété qui dit que la somme des mesures des angles d'un triangle vaut 180, c'est plus long...

Exemples d'utilisations du sinus :

1) On cherche la longueur du côté opposé d'un angle.

ABC est un triangle rectangle en A.
$\widehat{ACB} = 35$ et l'hypoténuse [BC] mesure 8cm.

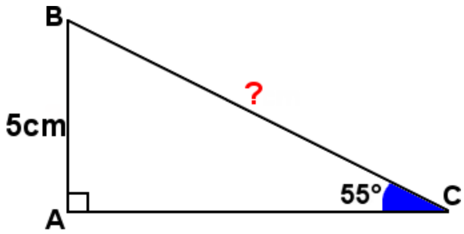
$$\sin(\widehat{ACB}) = \frac{BA}{BC}$$
$$\sin(35) = \frac{BA}{8}$$
$$BA = 8 \times \sin(35) \approx 4,59$$



2) On cherche la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle.

ABC est un triangle rectangle en A.
$\widehat{ACB} = 55$ et le côté opposé à $\widehat{ACB}$: [BA] mesure 5cm.

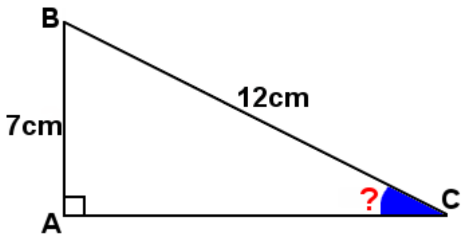
$$\sin(\widehat{ACB}) = \frac{BA}{BC}$$
$$\sin(55) = \frac{5}{BC}$$
$$BC = \frac{5}{\sin(55)} \approx 6,1$$



3) On cherche la mesure d'un angle aigu dans un triangle rectangle.

ABC est un triangle rectangle en A.
le côté opposé à l'angle $\widehat{ACB}$ est $AB = 7cm$ et l'hypoténuse [BC] mesure 12cm.

$$\sin(\widehat{ACB}) = \frac{BA}{BC}$$
$$\sin(\widehat{ACB}) = \frac{7}{12}$$
$$\widehat{ACB} = \sin^{-1}\left(\frac{7}{12}\right) \approx 35,7$$

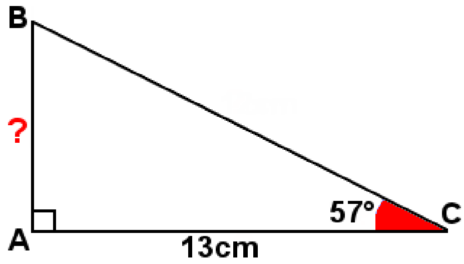


Exemples d'utilisations de la tangente :

1) On cherche la longueur du côté opposé d'un angle.

ABC est un triangle rectangle en A.
$\widehat{ACB} = 57$ et le côté adjacent [AC] mesure 13 cm.

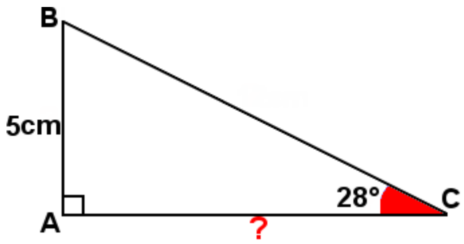
$$\tan(\widehat{ACB}) = \frac{AB}{AC}$$
$$\tan(57) = \frac{AB}{13}$$
$$AB = 13 \times \tan(57) \approx 20,02$$



2) On cherche la longueur du côté adjacent d'un triangle rectangle.

ABC est un triangle rectangle en A.
$\widehat{ACB} = 28$ et le côté opposé à $\widehat{ACB}$: [AB] mesure 5cm.

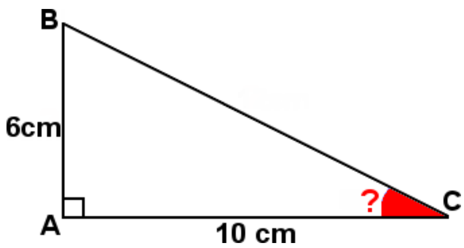
$$\tan(\widehat{ACB}) = \frac{AB}{AC}$$
$$\tan(28) = \frac{5}{AC}$$
$$AC = \frac{5}{\tan(28)} \approx 9,4$$



3) On cherche la mesure d'un angle aigu dans un triangle rectangle.

ABC est un triangle rectangle en A.
le côté opposé à l'angle $\widehat{ACB}$ est $AB = 6cm$ et l'adjacent à $\widehat{ACB}$: [AC] mesure 10cm.

$$\tan(\widehat{ACB}) = \frac{AB}{AC}$$
$$\tan(\widehat{ACB}) = \frac{6}{10}$$
$$\widehat{ACB} = \tan^{-1}\left(\frac{6}{10}\right) \approx 31$$



3.3 Deux formules de trigonométrie

Propriété

Les deux formules suivantes sont valables pour tout angle aigu $\widehat{A}$ dans un triangle rectangle :

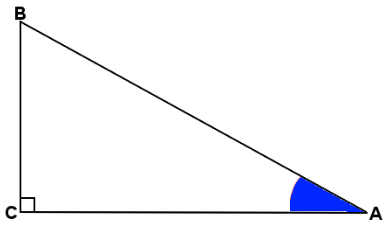
$$\sin^2\left(\widehat{A}\right) + \cos^2\left(\widehat{A}\right) = 1$$

$$\tan\left(\widehat{A}\right) = \frac{\sin\left(\widehat{A}\right)}{\cos\left(\widehat{A}\right)}$$

Remarque :

1. Quand on écrit $\sin^2\left(\widehat{A}\right)$ cela signifie bien évidemment $\sin\left(\widehat{A}\right) \times \sin\left(\widehat{A}\right)$
2. La première formule permet de calculer directement le sinus lorsque l'on connait déjà le cosinus et vice versa.
3. La seconde formule permet de calculer une des trois valeurs quand on connait déjà les deux autres.

Preuve **!**



• D'après les formules du sinus et du cosinus, on a :

$\sin^2\left(\widehat{A}\right) = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2$ et $\cos^2\left(\widehat{A}\right) = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$ donc :

$$\sin^2\left(\widehat{A}\right) + \cos^2\left(\widehat{A}\right) = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2}$$

Or d'après le théorème de Pythagore appliqué dans le triangle ABC rectangle en C, $BC^2 + AC^2 = AB^2$ donc :

$$\sin^2\left(\widehat{A}\right) + \cos^2\left(\widehat{A}\right) = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1.$$

• D'après les formules du sinus et du cosinus, on a :

$\sin\left(\widehat{A}\right) = \frac{BC}{AB}$ et $\cos\left(\widehat{A}\right) = \frac{AC}{AB}$ donc $\frac{\sin\left(\widehat{A}\right)}{\cos\left(\widehat{A}\right)} = \frac{\frac{BC}{AB}}{\frac{AC}{AB}} = \frac{BC}{\cancel{AB}} \times \frac{\cancel{AB}}{AC} = \frac{BC}{AC}$

car diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse !

Or $\frac{BC}{AC}$ est égal par définition à $\tan\left(\widehat{A}\right)$, on a donc bien $\tan\left(\widehat{A}\right) = \frac{\sin\left(\widehat{A}\right)}{\cos\left(\widehat{A}\right)}$.

4 Exemple d'utilisation

Dans un triangle RST rectangle en R, on sait que $\cos\left(\widehat{RST}\right) = 0,74$**. Trouver la valeur de** $\tan\left(\widehat{RST}\right)$**.**

• On commence par utiliser la première formule pour trouver la valeur de $\sin\left(\widehat{RST}\right)$:

$\sin^2\left(\widehat{RST}\right) + \cos^2\left(\widehat{RST}\right) = 1$ autrement dit :

$\sin^2\left(\widehat{RST}\right) + 0,74^2 = 1$ donc

$\sin^2\left(\widehat{RST}\right) = 1 - 0,74^2 = 0,4524.$

Et pour finir :

$\sin\left(\widehat{RST}\right) = \sqrt{0,4524}.$

• On utilise maintenant la seconde formule pour trouver la tangente de l'angle :

$$\tan\left(\widehat{RST}\right) = \frac{\sin\left(\widehat{RST}\right)}{\cos\left(\widehat{RST}\right)} = \frac{\sqrt{0,4524}}{0,74} \approx 0,909$$